

文章编号: 1000-7598(2010)10-3145-06

地基承载力上限分析中的 Monte Carlo 搜索技术

秦会来¹, 黄茂松², 王玉杰¹

(1. 中国水利水电科学研究院 岩土工程研究所, 北京 100048; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘要: Greco 提出的临界滑裂面搜寻的 Monte Carlo 搜索技术具有原理简单、适应性强、搜索性能好及容易编程实现等优点, 目前该方法已在边坡稳定的优化计算中有许多成功的应用。为能够在多块体上限法求解地基极限承载力的优化计算中应用 Monte Carlo 搜索技术, 基于上限法相容速度场的要求及地基承载力问题的特点, 对 Monte Carlo 搜索技术实现中的目标函数、几何约束条件、初始破坏面的产生以及收敛准则等重新进行了设置。由于 Monte Carlo 搜索技术随机性的特点, 某一次的搜索优化往往存在陷入局部极值的危险, 为解决这一不足, 采取了随机设置多次初始破坏面分别进行搜索优化的办法, 计算表明, 优化效果很好。通过对实际问题的计算以及对比发现, Monte Carlo 搜索技术在此处多块体上限法求解地基承载力问题中的优化应用是相当成功的。此外, 由于此处的优化是以破坏面上的节点为对象的, 因此, 不但可以方便地考虑三角形块体的优化, 而且也可以方便地考虑四边形块体的优化问题, 其适用性更强。

关键词: Monte Carlo 搜索技术; 多块体上限法; 地基承载力; 极限分析

中图分类号: TU 413.6⁺2

文献标识码: A

Application of Monte Carlo search technique to bearing capacity calculations by upper bound method

QIN Hui-lai¹, HUANG Mao-song², WANG Yu-jie¹

(1. Department of Geotechnical Engineering, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100048, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Monte Carlo search technique proposed by Greco is of the random walking type, and has been successfully used in the optimization calculation of the slope stability analysis. The method presented by Greco(1996) can provide solutions of the same quality as the best nonlinear programming methods, but the structure of the method is very simple. The Monte Carlo search technique can be easily programmed and implemented. In this paper, the Monte Carlo search technique presented by Greco(1996) is modified and improved to be applied to the optimization of the bearing capacity calculation by multi-block upper bound method. For this purpose, the following conditions must be taken into consideration, which are the kinematical admissibility requirement imposed by the upper bound method and the boundary conditions of the bearing capacity problems. Based on the above restrictions, the re-establishments have been done for the objective function, the geometrical constraints, and the generation of the starting slip surface and the criterion of arrest. After calculations, it has been found that, the search results tend to catch the local extremum due to the random characteristic of the Monte Carlo search technique and the more rigorous requirements imposed by the upper bound theorem. To solve this problem, many initial failure surfaces are generated to search respectively and the minimum value is selected as the final result. To examine the application quality of the Monte Carlo search technique, lots of calculations are done and comparisons are made. From the comparison, it is shown that the modified Monte Carlo search technique is efficient in optimization of bearing capacity calculation by upper bound. It should also be pointed out that the Monte Carlo search technique used here adopts the points on failure surface as the variables to optimize. So, it is convenient to optimize the failure mechanism employed which includes both the triangle blocks and quadrangle blocks in the multi-block upper bound method.

Key words: Monte Carlo search technique; multi-block upper bound method; bearing capacity; limit analysis

1 引言

临界滑裂面搜索中的 Monte Carlo 搜索技术, 具

有原理简单、适应性强、搜索性能好以及容易编程实现等优点^[1], 目前, 该方法主要应用在边坡稳定的优化分析中^[1-6]。本文尝试将 Greco^[1]提出的随

收稿日期: 2009-09-22

基金项目: 铁道部重点课题 (No. 2009G007-B); 中国博士后科学基金 (No. 20090460397)。

第一作者简介: 秦会来, 男, 1979 年生, 博士, 主要从事岩土工程极限分析方法应用研究。E-mail: huilaiqin@yahoo.com.cn

机渐进类 (random walking) Monte Carlo 搜索技术拓展应用于多块体上限法计算地基极限承载力的优化分析中。将 Monte Carlo 搜索技术应用于多块体上限法求解地基极限承载力问题的优化分析时, 除目标函数、边界条件、初始破坏面的产生及收敛准则等与边坡稳定分析不同外, 还有运动许可速度场的要求, 都需要在 Monte Carlo 搜索技术实现时作具体的体现。以下将详细探讨这些不同点在 Monte Carlo 搜索技术中的实现, 并通过计算与分析, 研究 Monte Carlo 搜索技术应用中存在的问题及解决对策, 通过计算与对比检验 Monte Carlo 搜索技术的应用效果。

2 多块体上限法计算地基极限承载力

本节简要介绍多块体上限方法计算地基极限承载力的基本过程。对于粗糙条形基础中心荷载作用下的地基极限承载力计算问题, 本文采用图 1 所示的破坏模式进行上限计算。图中点 1、2、...、 n 为标识破坏面位置的 n 个点。根据极限分析上限理论^[7], 并考虑此处多块体的破坏模式, 可得地基承载力的计算公式如下^[8]:

$$q_u \leq \frac{2c \cos \varphi \sum_{i=1}^{n-1} (d_i v_i + l_i v_i^j)}{B} - \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i v_i \cos \theta_i + w_0}{B} - \frac{2ql_{n-1} v_{n-1} \cos \theta_{n-1}}{B} \quad (1)$$

对照 Terzaghi^[9]建议的地基极限承载力计算的 3 项叠加法 (分别考虑黏聚力 c 、土体重度 γ 、超载 q 对承载力的贡献, 然后将三者叠加) 可以发现, 式 (1) 右端项分别对应的是 c 、 γ 、 q 对承载力的贡献, 相应的 3 项系数表达式为

$$N_c = \frac{2 \cos \varphi \sum_{i=1}^{n-1} (d_i v_i + l_i v_i^j)}{B} \quad (2)$$

$$N_q = -\frac{2l_{n-1} v_{n-1} \cos \theta_{n-1}}{B} \quad (3)$$

$$N_\gamma = -\frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} w_i v_i \cos \theta_i + 2w_0}{\gamma B^2} \quad (4)$$

式中: B 为基础宽度; w_0 为基础正下方三角形条块的重量; w_i 为第 i 个条块的重量; v_i 为第 i 个条块的速度; v_i^j 为第 i 个条块与其左边条块的相对速度; θ_i 为第 i 个条块速度的方向角, 由 y 轴正向逆时针度量, 范围为 $0 < \theta_i < \pi$ 。其他符号可参见图 1。

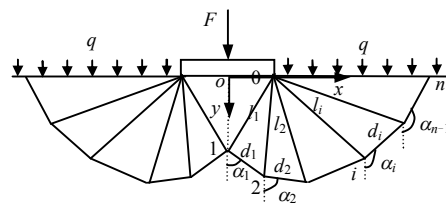


图 1 计算地基承载力的破坏模式

Fig.1 Failure mechanism for bearing capacity calculation

3 Monte Carlo 搜索技术的实现

3.1 优化问题描述

由于所选用的多块体破坏模式关于条基中心对称, 可只取 1/2 进行研究, 此处取右半部分进行研究。如图 1 所示, 在笛卡尔坐标系中 (取条基中点为坐标原点), 破坏面上各节点位置可由 (x_i, y_i) 表示, $i=1, 2, \dots, n$, n 为滑面节点数, 滑面也可表示为 $2n$ 维空间中的一个点:

$$S = [0, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, 0] \quad (5)$$

与边坡稳定求解安全系数不同, 此处求解的是地基极限承载力 q_u , q_u 就是 S 的函数。应用 Monte Carlo 搜索技术的目的就是要寻求一个临界的破坏面使式 (1) 计算的地基极限承载力 q_u 最小, 或者分别使式 (2) ~ (4) 对应的 N_c 、 N_q 、 N_γ 的值最小。在编程计算时, 只需按式 (1) 编程即可; 当需要计算某项系数时, 令其他两项为 0 即可, 比如计算系数 N_c 时, 令 q 、 γ 为 0 即可。优化的目的就是寻求临界滑裂面 S^* , 使得目标 $q_u(S^*) = \min q_u(S)$ 。

3.2 几何约束条件

(1) 根据极限分析上限法相容速度场的要求, 边界破坏面各线段 (也就是上限法中的速度间断面) 的方向角 α_i (如图 1 中所示, 方向为由 y 轴正向逆时针旋转) 需要满足:

$$0 < \alpha_i < \pi - \varphi \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

式中: φ 为土体内摩擦角。

(2) 破坏面上凹限定

尽管文献[1]指出, Monte Carlo 搜索技术在边坡中应用时并不需要事先做破坏面上凹的限定, 破坏面上凹在均质土体中会自动实现, 但对于本文所讨论问题, 为保证所划分的条块能够满足速度相容, 还是应该作破坏面上凹的限定, 该限定由下式实现:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i < \dots < \alpha_{n-1} \quad (7)$$

(3) 节点水平方向约束:

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n < x_{\max} \quad (8)$$

(4) 节点竖向约束:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < y_i < y_{\max} \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ y_n = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

式中: $x_{\max}$ 和 $y_{\max}$ 分别为 x 方向和 y 方向破坏面的搜索范围。地基破坏面的范围与基础宽度及土体内摩擦角等有关, $x_{\max}$ 与 $y_{\max}$ 选择时要确保将临界破坏面包含在内, 选择 $x_{\max} = 8B$ 和 $y_{\max} = 10B$ 一般足以满足要求。

(5) 相容速度场要求。

上限法应用中的一个关键问题就是相容速度场的确定。对于此处的地基承载力问题, 在图 1 所示的破坏模式中, 每一个条块的速度可由两个参量确定, 一为速度大小 v_i , 另一为速度方向角 θ_i , 由 y 轴正向逆时针旋转确定, $\theta_i = \alpha_i + \varphi$ 。将基础正下方的条块定为 0 条块, 鉴于此处选用对称的速度场以及计算中只需要知道各条块的相对速度大小, 可将其速度定为 $v_0 = 1$, 其方向角 $\theta_0 = 0$ 。已知基础正下方条块速度后, 可根据相容速度场的要求由左向右依次求解每一条块的速度。图 2 中给出了第 $i-1$ 、 i 条块两者之间的相容速度矢量关系图 (相容速度矢量三角形 ABC), 由此可根据 $i-1$ 条块的速度确定 i 条块的速度, 以及两者之间相对速度的大小。要使相容速度矢量三角形 ABC 成立, 就需要满足:

$$\theta_i > \theta_{i-1} \quad (10)$$

$$0.5\pi < \theta_i + \beta_i + \varphi < 1.5\pi \quad (11)$$

$$0.5\pi < \theta_{i-1} + \beta_i + \varphi < 1.5\pi \quad (12)$$

式 (10) 已由破坏面的上凹的约束得到保证。

式 (11)、(12) 就是对条块划分的综合约束。

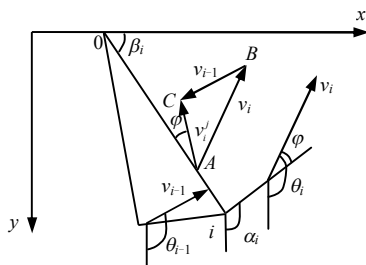


图 2 相容速度场的确定

Fig.2 Calculation of the kinematical velocity field

3.3 问题的求解

3.3.1 初始破坏面的产生

应用 Monte Carlo 搜索技术时, 开始可以使用 4

节点标识的破坏面, 待 4 节点优化成功后, 可以内插节点继续优化, 依次可进行 4、7、13、25、49 节点等破坏面的搜索优化, 以逐步提高精度。最初的 4 个节点可以指定, 也可以用随机方法产生, 但要保证每一随机产生的初始破坏面满足上述 3.2 节中几何条件的约束, 本文的初始破坏面由下式给出:

$$x_1 = 0 \quad (13)$$

$$y_1 = 0.2B + R_1(y_{\max} - 0.5B)/2 \quad (14)$$

$$x_4 = x_{\max} - R_2(x_{\max} - 0.5B)/2 \quad (15)$$

$$\eta_1 = \pi/4 - \pi R_3/12 \quad (16)$$

$$\eta_3 = \pi/4 + \pi R_4/12 \quad (17)$$

$$x_p = (x_4 \tan \eta_3 - y_1)/(\tan \eta_1 + \tan \eta_3) \quad (18)$$

$$y_p = x_p \tan \eta_1 + y_1 \quad (19)$$

$$x_2 = R_5 x_p \quad (20)$$

$$y_2 = (x_2 - x_1) \tan \eta_1 + y_1 \quad (21)$$

$$x_3 = x_4 - R_6(x_4 - x_p) \quad (22)$$

$$y_4 = (x_4 - x_3) \tan \eta_3 \quad (23)$$

$$y_5 = 0 \quad (24)$$

式中: R_1 、 R_2 、 $\dots$ 、 R_6 为随机产生于 $[0, 1)$ 之间的随机数。

3.3.2 节点探索阶段及整体探索阶段

对于此处所选用的破坏模式, 如图 1 所示, 除节点 1、 n 以外的所有节点都将会有 8 次探索机会, 节点 1 只有上下两次移动探索机会, 节点 n 只有左右两次移动探索机会。节点可能探索方向如图 3 所示^[1, 4], 节点 1 可能的探索方向只有方向 5、6; 节点 n 的可能探索方向只有方向 7、8, 其他节点有 8 个可能的探索方向。从节点 1 到节点 n , 每一个节点依次都需要在上述可能的探索方向上进行探索, 如果某一方向上探索成功, 就不再进行其他可能方向上的探索, 而进入下一节点的探索, 并将探索成功后的节点位置吸收到当前的破坏面; 如果节点在所有可能的探测方向上都探索过, 但还没有探索成功, 那么该点待在原地。此处所说的探索成功, 是指某一节点沿可能探索方向移动后, 由移动后的破坏面计算的地基承载力比原破坏面计算的地基承载力小。例如, 假设当前破坏面 $S = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_i, y_i, \dots, x_n, y_n]$, 其中 $x_1 = 0$, $y_n = 0$ 。点 V_i 由 (x_i, y_i) 移动到 (x'_i, y'_i) , 此时破坏面为 $S' = [x_1, y_1,$

$x_2, y_2, \dots, x'_i, y'_i, \dots, x_n, y_n]$, 如果 $q_u(S') < q_u(S)$, 则此次探索就成功了。当然, 每次探索产生的新破坏面都需要满足前述几何条件的约束。

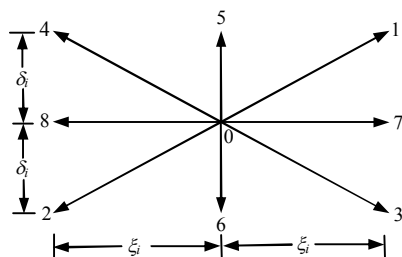


图3 节点可能探索方向示意图

Fig.3 Possible search directions for vertices

在寻求临界破坏面的过程中, 是要反复进行上述节点的探测循环的, 在反复探测循环的过程中, 节点探测的步长也是不断变化的。逐个节点进行探测循环后需要进行整个破坏面上节点的整体移动探测。这些过程与边坡稳定分析中类似, 可仿照文献[1, 4]进行, 此处不再给出。

3.3.3 收敛准则

此处探测循环结束的标志由 2 个条件来控制:

$$Dx_i < \Delta, \quad Dy_i < \Delta \quad (25)$$

$$df = |f_1 - f_0| < \frac{0.01}{n} \quad (26)$$

$$\Delta = x_n / 500(n-1) \quad (27)$$

式中: Dx_i 、 Dy_i 分别为节点 x 方向和 y 方向的探索步长; f_1 为本次节点探索、整体探索阶段后计算的地基极限承载力 q_u ; f_0 为上次节点探索、整体探索阶段后地基极限承载力计算值。

3.4 优化实现情况、存在的问题及解决方法

通过算例来检验 3.3 节中阐述的 Monte Carlo 搜索技术在多块体上限法求解地基极限承载力计算中的优化应用情况。以黏聚力为 10 kPa, 内摩擦角为 40° , 不考虑超载与土重的地基极限承载力计算为考查对象。图 4 给出了优化过程中总的搜索次数与计算的地基承载力数值的关系, 由图可见, 随着节点数目和探索次数的增加, 所计算的地基承载力不断得到优化。需要指明的是, 图 4 中的滑裂面搜索次数是一次完整搜索优化中的搜索次数, 包含了中间增加节点的过程。由图 4 也可以看到, 随着节点数目的增加, 优化效率越来越低。当节点增加到一定数目时, 例如图中 25 节点, 优化效率已经相当低, 再增加节点已失去意义, 此时可认为优化可以结束。

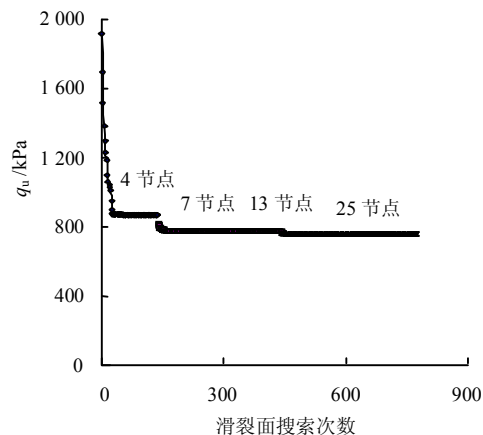


图4 试算破坏面数-地基承载力计算值曲线

Fig.4 Relationship between numbers of searched failure surfaces and values of bearing capacity

上述 Monte Carlo 搜索技术还存在一个突出的问题, 为解释该问题, 此处考察内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 时地基承载力系数 N_c 的计算问题, 分别进行 100 次 3.3 节中所介绍的搜索优化 (破坏面节点由初始 4 节点增加到最终的 25 节点), 各次独立优化的结果如图 5 所示。由图可见, 同一问题的 100 次搜索优化得到不同的计算结果。究其原因, 一方面可能是 Monte Carlo 随机搜索技术本身随机性特点所致, 另一方面在上限方法计算地基承载力时, 增加了速度场相容的限定, 从而对试算破坏面有了更高的要求。解决这一问题的办法就是增加试算破坏面的数量, Greco^[1]、陈祖煜^[10]等学者也是这么建议的。本文采用了设置多次随机初始破坏面分别进行搜索优化的方法。试算结果表明, 设置 100 次的初始随机破坏面一般即可得到非常接近全局最优解的结果。以下的计算结果均为设置 100 条初始破坏面所求得的最优结果。

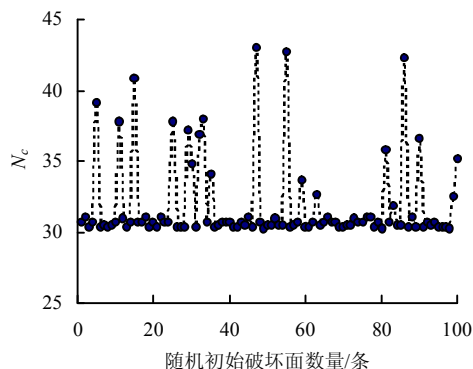


图5 不同初始随机破坏面优化后的最终地基承载力计算结果

Fig.5 Different values of bearing capacity for different initial failure surfaces

4 Monte Carlo 搜索技术应用效果检验

为检验 Monte Carlo 搜索技术在此处优化计算的应用效果,现考察某一条形基础的承载力计算情况。下文中优化前后的地基承载力均通过式(1)计算。计算参数为:土体内摩擦角 $\varphi=35^\circ$,黏聚力 $c=20\text{ kPa}$,土重度 $\gamma=18\text{ kN/m}^3$,基础宽度 $B=1.5\text{ m}$ 。随机产生的 100 条初始 4 节点破坏面如图 6 所示,与临界破坏面对应的初始 4 节点破坏面以及该破坏面节点逐步增加的优化过程见图 7。图 7(a)给出了与临界破坏面对应的初始 4 节点破坏面以及该破坏面优化后的 4、7、13、25 节点破坏面,图 7(b)给出了图 7(a)中破坏面的局部放大图。由图 7 可见,从初始产生的 4 节点破坏面到优化后的 4 节点破坏面的优化幅度是相当大的,而从优化后的 4 节点到优化后的 7、13、25 节点,其优化幅度逐渐减小,优化后的 13 节点破坏面与优化后的 25 节点破坏面之间的差别已经很小。这从各破坏面对应的地基承载力计算值也可以看出,初始 4 节点破坏面对应的地基承载力值为 8 203.4 kPa,优化后 4 节点破坏面对应的地基承载力值为 1 946.6 kPa,优化后 7 节点破坏面对应值为 1 745.3 kPa,优化后 13 节点破坏面对应值为 1 708.6 kPa,优化后 25 节点破坏面对应值为 1 698.3 kPa。

表 1 列出了本文方法优化计算的地基承载力系数 N_c 以及 Prandtl 的真实解、Soubra^[11]的上限解;表 2 给出了本文方法优化计算的地基承载力系数 N_q 以及 Reissner 的真实解、Soubra^[11]的上限解。需要指出的是 Soubra^[11]采用的也是多块体上限方法,所选的多块体破坏模式与本文相同(图 1),但他采用优化方法是负梯度法(reduced gradient method),优化参数是图 1 中每一个三角形条块的顶角和左底

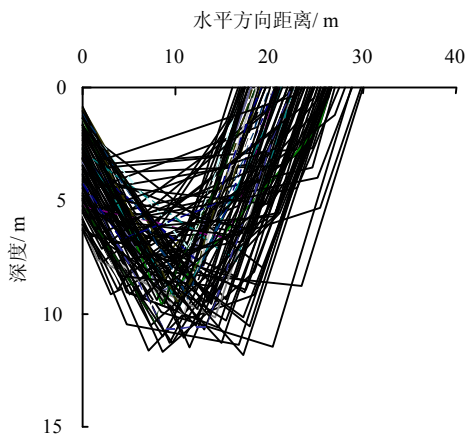


图 6 100 条随机产生的 4 节点初始破坏面
Fig.6 100 initial four-point slip surfaces generated by Monte Carlo method

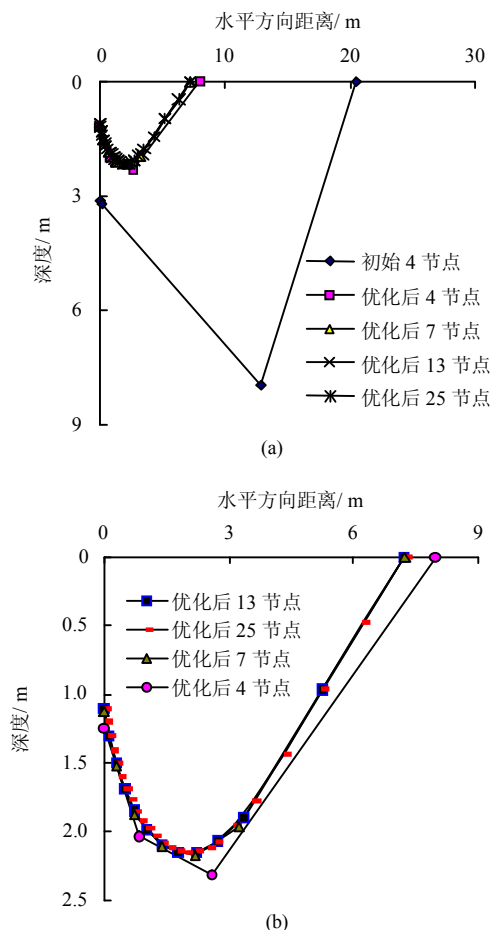


图 7 临界破坏面及其优化过程

Fig.7 The critical slip surface and its optimizing course

角。表中 Soubra^[11]的结果由 14 个条块计算,本文计算中 13 节点破坏面相当于 12 个条块,25 节点破坏面相当于 24 个条块。由计算结果来看, Monte Carlo 搜索技术在此处的拓展应用是相当成功的,而且计算速度也较快,同时本文的 Monte Carlo 速搜索技术以破坏面上节点为优化参数,因此,可以方便地推广到双层地基承载力的多块体上限分析及基坑抗隆起多块体上限分析等存在非三角形块体情况下的优化中^[8]。

表 1 N_c 计算结果及对比
Table 1 Comparison of N_c values

φ /($^\circ$)	N_c			
	Prandtl 真实解	Soubra ^[11] 上限解	本文(13 节点)	本文(25 节点)
0	5.14	5.15	5.15	5.14
4	6.19	6.19	6.19	6.19
8	7.53	7.54	7.54	7.53
12	9.28	9.30	9.31	9.30
16	11.63	11.65	11.66	11.64
20	14.83	14.86	14.88	14.85
24	19.32	19.37	19.40	19.35
28	25.80	25.88	25.92	25.85
32	35.49	35.62	35.69	35.57
36	50.59	50.82	50.95	50.74
40	75.32	75.77	75.99	75.62
44	118.37	119.29	119.79	119.00

表 2 N_q 计算结果及对比
Table 2 Comparison of N_q values

φ /(°)	N_q			
	Reissner 真实解	Soubra ^[11] 上限解	本文(13 节点)	本文(25 节点)
0	1.00	1.00	1.00	1.00
4	1.43	1.43	1.43	1.43
8	2.06	2.06	2.06	2.06
12	2.97	2.98	2.98	2.98
16	4.34	4.34	4.34	4.34
20	6.40	6.41	6.42	6.40
24	9.60	9.62	9.64	9.61
28	14.72	14.76	14.78	14.74
32	23.18	23.26	23.30	23.22
36	37.75	37.93	38.02	37.85
40	64.20	64.58	64.78	64.42
44	115.31	116.20	116.90	115.88

5 结 语

本文将 Greco^[1]提出的随机渐进类 (Random Walking) Monte Carlo 搜索技术拓展应用到多块体上限法计算地基极限承载力问题时的优化中。结合多块体上限方法的理论要求及地基承载力计算的特点, 本文对该方法应用时的几何约束条件、初始破坏面的产生、收敛准则等又重新进行了设定和探讨。由于上限法中相容速度场的限定以及 Monte Carlo 搜索技术的随机性特点, 笔者通过计算发现, 每一次应用 Monte Carlo 搜索技术时所得的计算结果仍有较大的离散性, 为解决这一问题, 本文采用了设置多次随机初始破坏面的办法。

通过计算与对比可以发现, 本文 Monte Carlo 搜索技术拓展应用是成功的, 为多块体上限法应用中的优化问题提供了一种可靠的优化模式。

参 考 文 献

- [1] GRECO V R. Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface[J]. **Journal of Geotechnical Engineering, ASCE**, 1996, 122(7): 517—525.
- [2] MALKAWI A I H, HASSAN W F, SARMA S K. An efficient search method for finding the critical circular slip surface using the Monte Carlo technique[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2001, 38: 1081—1089.
- [3] MAIKAWI A I H, HASSAN W F, SARMA S K. Global search method for locating general slip surface using Monte Carlo techniques[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE**, 2001, 127(8):

688—698.

- [4] 张鲁渝, 张建民. 基于 Monte Carlo 技术的临界滑面搜索算法的实现及改进[J]. **岩土工程学报**, 2006, 28(7): 857—862.
ZHANG Lu-yu, ZHANG Jian-min. Extended algorithm using Monte Carlo techniques for searching general critical slip surface in slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(7): 857—862.
- [5] 张鲁渝, 张建民. 基于滑面段旋转的 Monte Carlo 搜索技术及改进(I): 转角大小随机[J]. **岩土力学**, 2006, 27(11): 1902—1908.
ZHANG Lu-yu, ZHANG Jian-min. The modified Monte Carlo techniques by rotating slip segments for searching general critical slip surface (I): random angle of rotation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(11): 1902—1908.
- [6] 张鲁渝, 张建民. 基于滑面段旋转的 Monte Carlo 搜索技术及改进(II): 常值转角[J]. **岩土力学**, 2006, 27(12): 2197—2202.
ZHANG Lu-yu, ZHANG Jian-min. The extended Monte Carlo techniques by rotating slip segments for searching general critical slip surface (II): constant angle of rotation[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(12): 2197—2202.
- [7] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1975.
- [8] 秦会来. 地基极限承载力及基坑抗隆起稳定分析的多块体上限解[博士学位论文 D]. 上海: 同济大学, 2008.
- [9] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1943.
- [10] CHEN Z Y. Random trials used in determining global minimum factors of safety of slopes[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1992, 29: 225—233.
- [11] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE**, 1999, 125(1): 59—68.